

БІРТЕКТІ ЖӘНЕ БІРТЕКТІ ЕМЕС ТОЛҚЫНДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІ ФУРЬЕ ӘДІСІМЕН ШЕШУ

Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

22 қазан 2025
Алматы, Қазақстан



Дәрістің мақсаты – Біртекті және біртекті емес толқындық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептерді Фурье әдісімен шешуді үйрену

Негізгі сұрақтар:

- 1 Біртекті толқындық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептерді Фурье әдісімен шешу.
- 2 Біртекті емес толқындық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептерді Фурье әдісімен шешу.



Біртекті толқындық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есеп: Фурье әдісі Бірөлшемді біртекті толқындық теңдеу:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (1)$$

Бастапқы шарттар:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

Шекаралық шарттар:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Мақсат: $u(x, t)$ шешімін табу.

Фурье әдісімен шешу Фурье әдісі бойынша шешімді айнымалыларды ажырату арқылы іздейміз:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Теңдеуге алмастырамыз:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Бұл екі бірөлшемді теңдеуге бөлінеді:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(L) = 0, \quad (4)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \quad (5)$$



Штурм-Лиувилль есебі Теңдеуді (4) шешеміз:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Сондықтан (5) теңдеуі:

$$T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 T_n(t) = 0,$$

шешімі:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L} t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L} t\right).$$

Жалпы шешім Біртекті шешімдер суперпозициясы:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L} t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (6)$$



Коэффициенттерді анықтау Бастапқы шарттарды қолданамыз: 1. $t = 0$ кезінде:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \varphi(x) \Rightarrow A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

2. $u_t(x, 0) = \psi(x)$:

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \psi(x) \Rightarrow B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Қорытынды

- Толқындық теңдеуді Фурье әдісімен шешу үшін айнымалыларды ажыратамыз. - $X_n(x)$ — Штурм-Лиувилль есебінің меншікті функциялары (sin-тәрізді). - $T_n(t)$ — гармоникалық функциялар, бастапқы шарттарға байланысты коэффициенттермен. - Жалпы шешім (6) суперпозиция түрінде жазылады.



Біртекті емес толқындық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептер: Фурье әдісі
Бірөлшемді біртекті емес толқындық теңдеу:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (7)$$

бастапқы шарттар:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (8)$$

шекаралық шарттар

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Мақсат: $u(x, t)$ шешімін табу.

Фурье әдісі

Айнымалыларды ажырату және кеңейту

Шекаралық шарттарды қанағаттандыратын меншікті функцияларды (sin түрінде) аламыз:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Шешімді меншікті функциялар бойынша кеңейтеміз:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

мұндағы

$$F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$



Уақыт функцияларының теңдеуі
Теңдеуге (7) алмастырсақ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n''(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n U_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Ортогоналдық қасиетін қолдансақ:

$$U_n''(t) + a^2 \lambda_n U_n(t) = F_n(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Бастапқы шарттар:

$$U_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad U_n'(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Бірөлшемді шешім

Бірөлшемді теңдеу (10) шешіледі стандартты тәсілмен:

$$U_n(t) = A_n \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \sin(a\sqrt{\lambda_n}t) + U_{n,p}(t),$$

мұндағы $U_{n,p}(t)$ — дербес шешім, $F_n(t)$ -ға байланысты. Бастапқы шарттар арқылы:

$$A_n = U_n(0), \quad B_n = \frac{U_n'(0)}{a\sqrt{\lambda_n}}.$$



Бірөлшемді шешім

Бірөлшемді теңдеу (10) шешіледі стандартты тәсілмен:

$$U_n(t) = A_n \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \sin(a\sqrt{\lambda_n}t) + U_{n,p}(t),$$

мұндағы $U_{n,p}(t)$ — дербес шешім, $F_n(t)$ -ға байланысты. Бастапқы шарттар арқылы:

$$A_n = U_n(0), \quad B_n = \frac{U'_n(0)}{a\sqrt{\lambda_n}}.$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \sin(a\sqrt{\lambda_n}t) + U_{n,p}(t) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (11)$$

- A_n, B_n — бастапқы шарттардан есептеледі - $U_{n,p}(t)$ — функциясы $f(x, t)$ -ге байланысты дербес шешім

- Біртекті емес толқындық теңдеуді Фурье әдісімен шешу үшін меншікті функциялар бойынша кеңейту қолданылады. - Барлық кеңейту коэффициенттері уақыт бойынша бірөлшемді дифференциалдық теңдеулерді шешу арқылы табылады. - Нәтижесінде жалпы шешім (11) суперпозиция түрінде жазылады.



Біртекті емес толқындық теңдеу: Фурье әдісімен мысал Бірөлшемді біртекті емес толқындық теңдеу:

$$u_{tt} = u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (12)$$

бастапқы шарттар:

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (13)$$

шекаралық шарттар:

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad (14)$$

және бос мүшені сипаттайтын функциясы:

$$f(x, t) = \sin(x)e^{-t}.$$

Мақсат: $u(x, t)$ шешімін табу.

Фурье кеңейту Дирихле шарттарына сәйкес меншікті функциялар:

$$X_n(x) = \sin(nx), \quad \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Шешім мен бос мүшені сипаттайтын функциясын Фурье қатары бойынша кеңейтеміз:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin(nx), \quad f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin(nx),$$

мұндағы

$$F_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x, t) \sin(nx) dx.$$



Фурье коэффициенттерін есептеу

$$F_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \sin(nx) dx e^{-t} = \begin{cases} e^{-t}, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Сондықтан тек $n = 1$ мүшесі қалды:

$$U_1''(t) + \lambda_1 U_1(t) = U_1''(t) + U_1(t) = e^{-t}, \quad U_1(0) = 0, \quad U_1'(0) = 0$$

$$U_{n>1}(t) = 0.$$

Дербес шешім және жалпы шешім:

$$U_{1,p}(t) = \frac{e^{-t}}{2} \quad (\text{тексеру: } U_{1,p}'' + U_{1,p} = e^{-t}).$$

Жалпы шешім:

$$U_1(t) = A \cos(t) + B \sin(t) + \frac{e^{-t}}{2}.$$

Бастапқы шарттарды қолданамыз:

$$U_1(0) = A + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2},$$

$$U_1'(0) = B - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{2}.$$

Сондықтан:

$$U_1(t) = -\frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(t) + \frac{1}{2} e^{-t}.$$



Жалпы шешім

$$u(x, t) = U_1(t) \sin(x) = \left(-\frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(t) + \frac{1}{2} e^{-t} \right) \sin(x)$$

Барлық $n > 1$ мүшелері 0 болғандықтан, тек $n = 1$ шығады.



Қосымша ақпарат

Студенттерге қосымша әрі толыққанды мәліметтер алу үшін [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] әдебиеттер ұсынылады.



Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М.

Математикалық физика теңдеулері. Астана, 2010 ж.



Михлин С.Г.

Курс математической физики. М., 1968.



Владимиров В.С.

Уравнения математической физики. М., 1984.



Орынбасаров М.О., Оршубеков Н.Ә.

Математикалық физика теңдеулері. Алматы, 2009 ж.



Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С.

Математикалық физика теңдеулерінің септері мен жаттығулар жинағы. Алматы, 2009 ж.



Тихонов А.Н., Самарский А.А.

Уравнения математической физики. М., 2006.



Хомпыш Х.

Математикалық физика теңдеулері. Алматы, Қазақ Университеті, 2017 ж. 215 б.



НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА
РАҚМЕТ!

